элективный курс
по математике
«Система подготовки к ЕГЭ по математике»
класс 11
количество часов 34

Пояснительная записка

Программа элективного курса составлена на основе федерального компонента государственного стандарта среднего (полного) общего образования, требований к ЕГЭ. Элективный курс построен с опорой на знания и умения, получаемые учащимися при изучении математики в старшей школе.

Материал данного курса содержит нестандартные методы, которые позволяют более эффективно решать различные задачи.

К нестандартным задачам традиционно относятся задачи, которые выделяются необычной формулировкой, а также задачи, для решения которых требуются умения нестандартно мыслить, переносить известные методы решения в непривычные ситуации, проявлять находчивость и сообразительность.

Нестандартные задачи способствуют развитию логического мышления, математической интуиции, творческих способностей, прививают навыки исследовательской работы.

Наряду с основной задачей обучения математике – обеспечение прочного и сознательного овладения учащимися системой математический знаний и умений – данный элективный курс предусматривает формирование устойчивого интереса к предмету, развитие математических способностей. математикой.

Программа элективного курса предполагает изучение теории и отработку практических навыков по рассматриваемым вопросам и рассчитан на 34 часа (1 час в неделю в течение учебного года).

Цели элективного курса:

- углубление курса алгебры и начал анализа 11 класса;

- изучение современных нестандартных методов решения в соответствии с программой для поступающих в вузы и требованиями, предъявляемыми к выпускникам на едином государственном экзамене;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни;
- воспитание средствами математики культуры личности, знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей, понимания значимости математики для общественного прогресса.

Задачи элективного курса:

- повышение математической подготовки учащихся, овладение знаниями и умениями в объеме, необходимом для успешной сдачи экзаменов и продолжения математического образования;
- систематизация нестандартных методов при решении текстовых задач, преобразовании тригонометрических выражений, решение уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, показательные и логарифмические функции;
- решение комплексных задач, связанных с построением графиков функций и фигур, вычислением периметров и площадей построенных фигур.

Основное содержание — 34 ч.

Результаты обучения

В результате изучения данного элективного курса учащиеся должны уметь решать задачи по различным темам курса алгебры и начал анализа, используя стандартные и нестандартные методы и приемы:

- уметь использовать свойства функций для решения нестандартных тригонометрических уравнений;
- усвоить алгоритмы решения текстовых задач различного содержания; закрепить умения в решении рациональных уравнений и их систем;
- иметь четкое представление о темах задач единого государственного экзамена,

об основных методах их решения;

- приобрести опыт в построении графиков функций, а также фигур, заданных на координатной плоскости уравнениями и неравенствами;
- решать задачи с параметрами, содержащими тригонометрические, обратные тригонометрические, показательную, логарифмическую функции.

Учебно - тематический план

№ п/п	Наименование разделов тем	Количество часов	Форма контроля	Дата
I.	**Текстовые задачи и техника их решения.**	**9**		
1.	Классификация и методы решения текстовых задач. Задачи на движение.	1	Текущий контроль	1 нед
2.	Задачи на совместную работу.	1	Самооценка учащихся	2 нед
3.	Задачи на проценты. Задачи экономического содержания.	1	Рейтинговая оценка	3 нед
4.	Задачи на числовые зависимости.	1	Собеседование с учащимися.	4 нед
5.	Задачи аналитического содержания (на смеси, сплавы, растворы).	1	Тест	5 нед
6.	Нестандартные текстовые задачи.	1	Презентация самостоятельно выбранного решения	6 нед
7.	Задачи, в которых число неизвестных больше числа уравнений.	2	Презентация решения	7 - 8 нед
8.	Задачи, в которых требуется найти наибольшее и наименьшее значения некоторого выражения.	1	Тест	9 нед

II.	**Преобразование тригонометрических выражений.**	**3**		
1.	Преобразование тригонометрических выражений с помощью основных тригонометрических формул.	1	Текущий контроль	10 нед
2.	Вычисление значений выражений, содержащих тригонометрические функции.	1	Самооценка учащихся	11 нед
3.	Преобразование тригонометрических выражений нестандартными методами.	1	Тест	12 нед
III	**Функции и графики.**	**4**		
1.	Построение графиков функций без помощи производной. Арифметические операции над графиками функций: сложение и умножение графиков.	1	Самооценка и оценка учащихся	13 нед
2.	Построение графиков функций, содержащих модуль или несколько модулей.	1	Презентация	14 нед
3.	Построение графиков сложных функций.	1	Презентация	15 нед
4.	Преобразование графиков функций. Исследование функций по графику.	1	Презентация	16 нед
IV	**Обратные тригонометрические функции.**	**5**		
1.	Обратные тригонометрические функции. Функция y=arcsinx; y=arcosx; y=arctg x; y=arcctg x. Графики и свойства.	1	Текущий контроль	17 нед

2.	Вычисление значений тригонометрических функций и обратных тригонометрических.	1	Самооценка учащихся	18 нед
3.	Доказательство тождеств, содержащих обратные тригонометрические функции.	1	Текущий контроль	19 нед
4.	Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции.	1	Рейтинговая самостоятельная работа	20 нед
5.	Построение графиков.	1	Презентация	21 нед
V.	**Решение нестандартных тригонометрических уравнений и неравенств.**	**8**		
1.	Решение уравнений, основанное на области определения входящих в уравнение функций.	1	Собеседование с учащимися	22 нед
2.	Использование области значений, ограниченности синуса и косинуса для решения тригонометрических уравнений.	1	Презентация	23 нед
3.	Тригонометрические уравнения, содержащие более одного неизвестного.	1	Тестовая работа	24 нед
4.	Тригонометрические уравнения с модулем.	1	Тестовая работа	25 нед
5.	Тригонометрические уравнения с параметром.	4	Самооценка	26 - 29 нед
VI	**Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств.**	**5**		

1.	Использование свойств показательной и логарифмических функций при решении задач.	1	Собеседование с учащимися	30 нед
2.	Решение показательных уравнений и неравенств различными методами.	1	Тест	31 нед
3.	Решение логарифмических уравнений и неравенств различными методами.	1	Тест	32 нед
4.	Решение логарифмических уравнений и неравенств, показательных уравнений и неравенств с параметром.	1	Собеседование с учащимися	33 нед
5.	Решение тестов повышенной сложности	1	Самооценка	34 нед

Содержание программы.

Тема №1

Текстовые задачи и техника их решения (9 ч.)

Классификация и методы решения текстовых задач. Задачи на движение (прямолинейное движение в одном направлении и навстречу друг другу, движение по реке, движение по окружности). Задачи на работу, в том числе на совместную работу. Задачи на проценты, в том числе экономического содержания. Задачи на числовые зависимости. Задачи на смеси, сплавы, растворы. Нестандартные текстовые задачи. Задачи, в которых число неизвестных больше числа уравнений. Задачи, решаемые с помощью неравенств. Задачи, в которых требуется найти наибольшее ли наименьшее значения выражения.

Тема № 2

Преобразование тригонометрических выражений (3 ч.)

Преобразование тригонометрических выражений с помощью основных тригонометрических формул. Вычисление значений выражений, содержащих тригонометрические функции. Преобразование тригонометрических выражений нестандартными методами.

Тема № 3

Функции и графики (4ч.)

Построение графиков тригонометрических функций и их преобразование. Операции над графиками функций: сложение и умножение графиков. Построение графиков функций, которые задаются аналитическим выражением, содержащим модуль или несколько модулей. Построение графиков сложных функций. Преобразование графиков функций. Исследование функции по графику. Изображение на координатной плоскости фигур, заданных уравнениями, неравенствами и их системами.

Тема № 4

Обратные тригонометрические функции (5 ч.)

Обратные тригонометрические функции. Построение и преобразование графиков обратных тригонометрических функций. Вычисление значений тригонометрических функций от обратных тригонометрических и, наоборот. Преобразование выражений и доказательство тождеств, содержащих обратные тригонометрические функции. Построение графиков. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции.

Тема № 5

Решение нестандартных тригонометрических уравнений и неравенств (8ч.)

Применение свойств функций и числовых неравенств при решении тригонометрических уравнений. Решение уравнения, основанное на области определения входящих в него функций.

Использование области значений, ограниченности, четности или нечетности функций. Оценка выражений с помощью неравенств. Тригонометрические уравнения, содержащие более одного неизвестного. Тригонометрические уравнения и неравенства с модулем и параметром.

Тема № 6

Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств (6ч.)

Использование свойств показательных и логарифмических функций при решении задач. Решение показательных уравнений и неравенств различными методами. Преобразование выражений, содержащих логарифмы. Решение логарифмических уравнений и неравенств различными методами. Решение логарифмических и показательных уравнений с параметром.

Тематика творческих, реферативных, научно-исследовательских, проектных работ учащихся

1. Историческая справка о тригонометрии. Обратная тригонометрия.
2. Функции в природе и технике.
3. Уравнения и неравенства смешанной типа, содержащие тригонометрические функции (по материалам ЕГЭ, части В,С).
4. Нестандартные уравнения и неравенства, содержащие тригонометрические функции.
5. Нестандартные текстовые задачи.
6. История логарифмов и их применение
7. Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.
8. Из истории показательной и логарифмической функций.
9. Логарифмические уравнения с параметром.
10. Логарифмы и музыка.

ЛИТЕРАТУРА

Литература для учителя.

1. И.А. Кушнир. Неравенства. — Киев, 1996 г.
2. И.А. Кушнир. Уравнения. — Киев, 1996 г.
3. И.А. Кушнир. Функции. 1996 г.
4. И.А. Кушнир. Шедевры школьной математики. — Киев, 1996 г.
5. Ю.В. Кириченко. Репетитор по математике. — Ростов-на-Дону: Феникс, 1997 г.
6. В.Л. Натяганов, Л.М. Лужина. Методы решения задач с параметрами. — Издательство МГУ, 2003 г.
7. Е.Д. Куланин, С.Н. Федин. 5000 конкурсных задач по математике. — Москва, 1999 г.
8. В.Г. Махров, В.Н. Махрова. Новый репетитор по математике. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2004 г.
9. А.М. Титаренко. Форсированный курс подготовки к экзамену по математике. Практикум. — Москва, 2005 г.
10. 10. Г.В. Дорофеев, Е.А. Седова, С.А. Шестаков. ЕГЭ. Математика. — Москва: Эксмо, 2006 г.
11. П.И. Горнштейн, А.Г. Мерзляк и др. Подводные рифы конкурсного экзамена по математике. — Киев, 1994 г.
12. А.П. Горячев, С.А. Гришин и др. Сборник конкурсных и олимпиадных задач по математике. — М., 2001 г.
13. СВ. Кравцев, Ю.Н. Макаров и др. Методы решения задач по алгебре. Москва, 2001 г.

14. М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, Конкурсные задачи по математике. — Москва: Наука, 1992 г.
15. Ткачук В.В. Математика — абитуриенту. — Москва, 1994 г. — Том 1,2.

Литература для учащихся.

1. В.Г. Махров, В.Н. Махрова. Новый репетитор по математике. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2004 г.

2.А.М. Титаренко. Форсированный курс подготовки к экзамену по математике. Практикум. — Москва, 2005 г.

3. Математика: Справочные материалы: Книга для учащихся.-М.: Просвещение, 1998

4 .Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы: условия и решения. Вып.3/ Авт.Л.И.Звавич, Л.Я. Шляпочник.- М.:Школа- Пресс, 1994

5. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.
Задачи с параметрами. 3-е издание, дополненное и переработанное. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2002

6. Единый государственный экзамен: математика: сб.заданий/ [Л.О.Денищева, Г.К.Безрукова, Е.М.Бойченко и др.]. – М.: Просвещение, 2008

7. Варианты единого государственного экзамена.

8. Ивлев Б.М. и др.
Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10 класса/Б.М.Ивлев, С.М.Саакян, С.И.Шварцбурд.– М.: Просвещение, 1990

9. Ивлев Б.М. и др.
Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса/Б.М.Ивлев, С.М.Саакян, С.И.Шварцбурд. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1995

Приложение.
«Нестандартные методы решения
уравнений и неравенств»

При решении уравнений и неравенств в математике используются стандартные способы решения и отличные от них – нестандартные.

Наиболее традиционный способ решения состоит в том, что с помощью стандартных приемов: раскрытие скобок, приведение подобных членов, освобождение от знаменателя, возведение в натуральную степень обеих частей уравнения, разложение на множители, введение вспомогательных неизвестных и т.д., решение данного уравнения сводится к решению элементарного.

В представленном материале при решении уравнений и неравенств используются приемы и методы как стандартные, так и отличные от них: введение функций, использование области определения и множества значений вычислений. Здесь нет общих рецептов. Многое зависит от умения, сообразительности, наблюдательности, опыта.

Материал может быть использован при подготовке к единому государственному экзамену.

I. Использование области определения функций при решении уравнений и неравенств

Этот метод наиболее результативен при решении уравнений и неравенств, в состав которых входят функции

$y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \log_a x$; $y = \sqrt{f(x)}$.

При решении уравнения или неравенства перенести все члены в левую часть и рассмотреть функцию *f (x)*. Найти её область определения *Д (f)*. При этом:

1). Если *Д (f) = ф,* то уравнение или неравенство решений не имеют.

2). Если *Д (f) = {a_1; a_2; a_3.....a_n},* то действительные решения данного уравнения и неравенства находятся среди чисел *a_1; a_2; a_3.....a_n.* Теперь необходимо проверить, какие из данных чисел являются решениями уравнения или неравенства.
3). Если *Д (f) = [а; в],* то нужно проверить верно ли уравнение или неравенство на концах промежутка и в каждом промежутке, причём, если $a < 0$, а $в > 0$, то необходима проверка на промежутках *(а; 0) и [0; в).*

<u>Примеры:</u>

1. Решить уравнение: $\sqrt{x-3}+\sqrt{6-2x}=0$

Рассмотрим функцию: $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{6-2x}$

Д *(f)*: $\begin{cases} x-3\ge 0 \\ 6-2x\ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge 3 \\ -2x\ge -6 \end{cases}$

$\begin{cases} x\ge 3 \\ x\le 3 \end{cases}$

$x=3$

Отсюда: $x = 3$ может являться корнем данного уравнения.

Проверим это:

Если $x = 3$, то $\sqrt{3-3}+\sqrt{6-2\cdot 3}=0$ – верно

Значит: уравнение имеет один корень x = 3

Ответ: 3.

2. Решить уравнение: $\sqrt[8]{1-x^2}+\sqrt[4]{x^4-1}=3^x-\log_3(2+x^6)$

$$\sqrt[8]{1-x^2}+\sqrt[4]{x^4-1}-3^x+\log_3(2+x^6)=0$$

Рассмотрим функцию: $y=\sqrt[8]{1-x^2}+\sqrt[4]{x^4-1}-3^x+\log_3(2+x^6)$

Д *(y)*: $\begin{cases} 1-x^2\ge 0 \\ x^4-1\ge 0 \\ 2+x^6>0 \end{cases}$

$\begin{cases} |x|\le 1 \\ \\ \end{cases}$

$|x| \geq 1$

x є (– □; + □)

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

Отсюда: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$ могут являться корнями уравнения.

Проверим это:

Если $x = 1$, то $\sqrt[8]{0} + \sqrt[4]{0} = 3 - \log_3(2+1)$

Равенство неверно x = 1 не является корнем данного уравнения.

Если $x = -1$, то $\sqrt[8]{0} + \sqrt[4]{0} = 3^{-1} - \log_3(2+1)$

Равенство неверно $x = -1$ не является корнем данного уравнения.

Ответ: уравнение корней не имеет.

3. Решить уравнение: $\arccos x = \pi - \sqrt{|x| - 1}$

$\arccos x - \pi + \sqrt{|x| - 1} = 0$

Рассмотрим функцию: $y = \arccos x - \pi + \sqrt{|x| - 1}$

Д *(y)*: $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ (|x| - 1) \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ |x| \geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \leq -1 \text{ или } x \geq 1 \end{cases}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

Проверим, являются ли эти значения корнями данного уравнения.

Если x = 1, то $\arccos 1 = \pi - \sqrt{|1| - 1}$

Равенство неверно, $x = 1$ не является корнем уравнения.

Если x = – 1, то $\arccos(-1) = \pi - \sqrt{|-1| - 1}$

Равенство верно, $x = -1$ является корнем данного уравнения.

Ответ: – 1.

4. Решить неравенство: $\sqrt{x-1} + 2^{\arcsin\frac{1}{x}} > 1$

$\sqrt{x-1} + 2^{\arcsin\frac{1}{x}} - 1 > 0$

Рассмотрим функцию: $y = \sqrt{x-1} + 2^{\arcsin\frac{1}{x}} - 1$

Д *(y)*: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$x \geq 1$

Проверим является ли данное множество решением неравенства.

Если $x = 1$, то неравенство $\sqrt{1-1}+2^{\arcsin\frac{1}{1}}>1$ – верно.

Если $x > 1$, то $\sqrt{x-1}>0$; $\arcsin\frac{1}{x}>0$; $2^{\arcsin\frac{1}{x}}>1$.

Значит неравенство: $\sqrt{x-1}+2^{\arcsin\frac{1}{x}}>1$ – верно при $x > 1$

Отсюда: решением неравенства является множество: $[1; +\infty)$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

5. Решить неравенство: $\sin(x-1)+\dfrac{1}{\sin(x-1)}+\sqrt{5x-x^2-4}>2$

$$\sin(x-1)+\frac{1}{\sin(x-1)}+\sqrt{5x-x^2-4}-2>0$$

Рассмотрим функцию: $y=\sin(x-1)+\dfrac{1}{\sin(x-1)}+\sqrt{5x-x^2-4}-2$

Д (y): $\begin{cases} \sin(x-1) \neq 0 \\ 5x - x^2 - 4 \geq 0 \end{cases}$

Решим второе неравенство системы:

$5x - x^2 - 4 \geq 0$

$x^2 - 5x + 4 \leq 0$

$x_1 = 4$ $\quad x_2 = 1$

$1 \leq x \leq 4$

Если $x = 1$, то $\sin(x-1) \neq 0$ – неверно.

Значит: функция y определена при всех x принадлежащих промежутку $(1; 4]$.

Проверим, является ли данное множество решением неравенства.

Если x = 4, то данное неравенство верно.

Если x є (1; 4), то $\sin(x-1)+\dfrac{1}{\sin(x-1)}\geq 2$, так как сумма двух обратных чисел больше или равна 2 и $\sqrt{5x-x^2-4}>0$

Отсюда: данное неравенство при x є (1; 4) тоже верно.

Значит: решением данного неравенства является множество (1; 4].

Ответ: (1; 4].

6. Решить неравенство: $\sqrt[6]{x}+2x^3+\log_3(x+2)-\sqrt{1-x}<4$

$$\sqrt[6]{x}+2x^3+\log_3(x+2)-\sqrt{1-x}-4<0$$

Рассмотрим функцию: $y = \sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x} - 4$

Д (y): $\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > -2 \\ x \leq 1 \end{cases}$

$0 \leq x \leq 1$

Решением данного неравенства может быть множество [0;1].

Проверим это.

Если $x = 1$, то $\sqrt[6]{1} + 2 \cdot 1^3 + \log_3(1+2) - \sqrt{1-1} < 4$ – неверно.

$x = 1$ не является решением неравенства.

Если $x = 0$, то $\sqrt[6]{0} + 2 \cdot 0^3 + \log_3(0+2) - \sqrt{1-0} < 4$ – верно.

$x = 0$ является решением неравенства.

Если x є (0;1), то данное неравенство верно.

Отсюда: решением данного неравенства является множество [0; 1).

Ответ: [0; 1).

7. Решить неравенство: $\arcsin(x^2 + 1) < 2$

$\arcsin(x^2 + 1) - 2 < 0$

Рассмотрим функцию: $y = \arcsin(x^2 + 1) - 2$

Д (y): $-1 \leq x^2 + 1 \leq 1$

$-2 \leq x^2 \leq 0$

$x = 0$

Отсюда, если неравенство имеет решение, то им является только $x = 0$.

Проверим это. Если $x = 0$, то $\arcsin(0+1) < 2$ – верно, так как $\frac{\pi}{2} < 2$

Ответ: 0.

II. Использование ограниченности функций (области значений) при решении уравнений

Наиболее результативным данный метод является при решении уравнений, в состав которых входят функции, области значений которых ограничены:

$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \arccos x$ $y = \arcsin x$

$y = |x|$ $y = \sqrt{x}$ $y = a^x$

1. Решить уравнение: $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x + 6y + 18 = 0$

$$(2x^2 - 4xy + 2y^2) + (x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 6y + 9) = 0$$

$$2(x - y)^2 + (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

Сумма квадратов чисел равна 0, если эти числа равны 0.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 3 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$x = -3 \qquad y = -3$$

(–3; – 3) – решение уравнения с двумя переменными.

2. Решить уравнение: $\sin\frac{5x}{2} + \cos 6x = 2$

$$\begin{cases} \sin\frac{5x}{2} = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z \\ 6x = 2\pi \kappa, \ \kappa \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5}, \ n \in Z \\ x = \frac{\pi \kappa}{3}, \ \kappa \in Z \end{cases}$$

Отсюда: $\frac{\pi}{5} + \frac{4\pi n}{5} = \frac{\pi \kappa}{3} \quad n \in Z$

$$\frac{1}{5} + \frac{4n}{5} = \frac{\kappa}{3} \quad n \in Z$$

$$3 + 12n = 5\kappa \quad n \in Z$$

$$\kappa = \frac{12n + 3}{5} \quad n \in Z$$

κ – целое число, если $n = 1 + 5t, \ t \in Z$

Отсюда: $x = \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi + 20\pi t}{5}, \ t \in Z$

$$x = \pi + 4\pi t, \ t \in Z$$

Ответ: $\pi + 4\pi t, \ t \in Z$.

3. Решить уравнение: $5\sin 2x - \sin 6x + 6 = 0$

$$\begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin 6x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\kappa,\ \kappa \in Z \\ 6x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi\kappa,\ \kappa \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z \end{cases}$$

Отсюда: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi\kappa = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3} \quad \kappa \in Z$

$$-\frac{1}{4} + \kappa = \frac{1}{12} + \frac{n}{3} \quad \kappa \in Z$$

$$-3 + 12\kappa = 1 + 4n \quad \kappa \in Z$$

$$n = -1 + 3\kappa \quad \kappa \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi(-1+3\kappa)}{3} \quad \kappa \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi\kappa,\ \ \kappa \in Z$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi\kappa,\ \ \kappa \in Z.$

4. Решить уравнение: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} + \sin^4 4x$

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \\ \sin^4 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1 \\ \sin 4x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(x - \dfrac{\pi}{4}) = 1 \\ 4x = \pi n,\ n \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - \dfrac{\pi}{4} = 2\pi\kappa, \quad \kappa \in Z \\ x = \dfrac{\pi n}{4}, \quad n \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi\kappa, \quad \kappa \in Z \\ x = \dfrac{\pi n}{4}, \quad n \in Z \end{cases}$$

Отсюда: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\kappa = \dfrac{\pi n}{4} \quad \kappa \in Z$

$n = 1 + 8\kappa \quad \kappa \in Z$

Значит: $x = \dfrac{\pi(1+8\kappa)}{4} \quad \kappa \in Z$

$x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi\kappa, \quad \kappa \in Z$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\kappa, \quad \kappa \in Z$.

Очень часто в уравнении удобно рассмотреть равенство двух функций *f(x)* = *g*(*x*). В таких уравнениях удобно найти области значений функций и найти их пересечение, а затем решить систему уравнений.

E(f) – область значений функции *f(x)*

E(g) – область значений функции *g(x)*

Если $E(f) \cap E(g) = a$, то $\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$

1. Решить уравнение: $\sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) = x^2 - 4x + 5$

Рассмотрим функции: $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$

$g(x) = x^2 - 4x + 5$

E(f) = [–1; 1]

E(g) = [1; +∞]

$E(f) \cap E(q) = \{ 1 \}$

Отсюда: данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) = 1 \\ \end{cases}$

$$x^2 - 4x + 5 = 1$$

Решим I уравнение системы: $\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1$

$$\frac{\pi x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x = 2\pi + 8\pi\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2 + 8\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Решим II уравнение системы: $x^2 - 4x + 5 = 1$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x = 2$$

Отсюда: решением системы, а значит и данного уравнения является $x = 2$

Ответ: 2.

2. При каких значениях *a* уравнение $\sqrt{\sin\frac{x}{7}} = \sin\frac{a-x}{2} - 1$ имеет хотя бы один корень.

Решение:

Рассмотрим функции: $f(x) = \sqrt{\sin\frac{x}{7}}$

$$g(x) = \sin\frac{a-x}{2} - 1$$

$E(f) = [0; 1]$

$E(g) = [-2; 0]$

Так как $E(f) \cap E(g) = \{ 0 \}$, то данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{\sin\frac{x}{7}} = 0 \\ \sin\frac{a-x}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим I уравнение системы:

$$\sqrt{\sin\frac{x}{7}} = 0$$

$$\sin\frac{x}{7} = 0$$

$$\frac{x}{7} = \pi\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$x = 7\pi\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

Подставим найденное решение во II уравнение системы:

$\sin\frac{a-7\pi\kappa}{2} - 1 = 0, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

$\sin\frac{a-7\pi\kappa}{2} = 1, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

$\frac{a-7\pi\kappa}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad \kappa \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}$

$a - 7\pi\kappa = \pi + 4\pi n, \quad \kappa \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}$

$a = \pi + \pi(7\kappa + 4n), \quad n \in \mathbb{Z},\ \kappa \in \mathbb{Z}$

$a = \pi \cdot (1 + 7\kappa + 4n), \quad n \in \mathbb{Z},\ \kappa \in \mathbb{Z}$

Отсюда: при $a = \pi \cdot (1 + 7\kappa + 4n), \quad n \in \mathbb{Z},\ \kappa \in \mathbb{Z}$ данная система уравнений, а значит и данное уравнение имеет хотя бы один корень.

Ответ: $\pi \cdot (1 + 7\kappa + 4n),\ n \in \mathbb{Z},\ \kappa \in \mathbb{Z}$.